Rozwiązywanie równań różniczkowych

1. Równanie różniczkowe zwyczajne 1. rzędu

A. Metoda rkfixed - zaimplementowana w Mathcadzie metoda Rungego-Kutty 4. rzędu ze stałym krokiem całkowania:

rkfixed(y, x0,xmax, N, P)

gdzie:

y	wartość początkowa dla x0 lub wektor wartości początkowych zmiennej zależnej - w przypadku układu równań
x0	początkowy zakres zmiennej niezależnej
xmax	końcowy zakres zmiennej niezależnej
N	liczba kroków całkowania
P	wektor pochodnych

Przykład A.1. Rozwiązać równanie różniczkowe y'+3y=0 z warunkiem początkowym y(0)=4 dla 100 kroków w zakresie $x \in$<0;4>.

$y := 4$ 1.Definiujemy punkt startowy

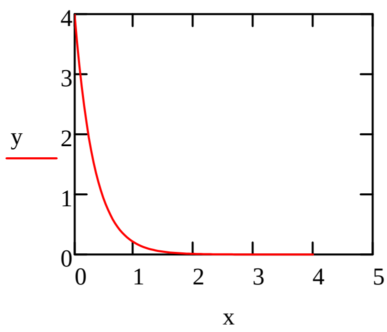
$P(x,y) := -3y$ 2. Definujemy pochodną

$R := \mathrm{rkfixed}(y,0,4,100,P)$ 3. Wywołanie integratora dla zakresu <0;4> i liczby kroków 100

$x := R^{\langle 0\rangle}$ $y := R^{\langle 1\rangle}$ Wynik ma postać macierzy dwukolumnowej, w kórej pierwsza kolumna to zmienna niezależna, a kolumna druga to zmienna zależna.

R =

	0	1
0	0	4
1	0.04	3.548
2	0.08	3.147
3	0.12	2.791
4	0.16	2.475
5	0.2	2.195
6	0.24	1.947
7	0.28	1.727
8	0.32	...



B. Metoda Rkadapt - metoda Rungego-Kutty 4. rzędu ze zmiennym krokiem całkowania

Rkadapt(y, x0,xmax, N, P) - parametry identyncze jak dla rkfixed

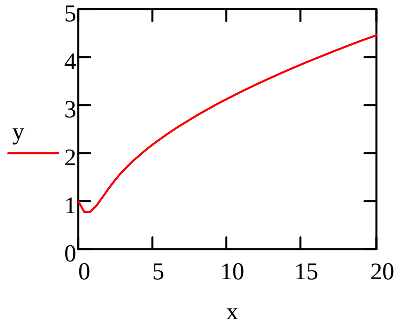
Przykład B.1. Rozwiązać równanie różniczkowe y'+y^2 -x=0 dla warunku początkowego y(0)=1 dla 50 kroków w zakresie $x \in$<0;20>.

$y := 1$ 1. Definiujemy punkt startowy

$P(x,y) := -y^2 + x$ 2. Definujemy pochodną

$R := \mathrm{Rkadapt}(y,0,20,50,P)$ 3. Wywołanie integratora

$x := R^{\langle 0\rangle}$ $y := R^{\langle 1\rangle}$



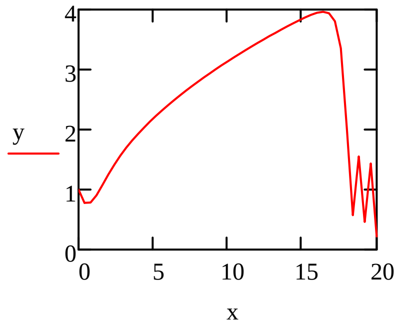
C.d. zadania: rozwiązać to samo równanie metodą *rkfixed.*

$y := 1$

$P(x,y) := -y^2 + x$

$R := \mathrm{rkfixed}(y,0,20,50,P)$

$x := R^{\langle 0\rangle} \qquad y := R^{\langle 1\rangle}$



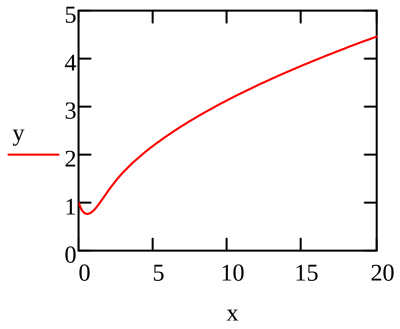
Metoda *rkfixed* dla zadanej liczby kroków okazała się niestabilna. Zwiększmy liczbę kroków do 100.

$y := 1$

$P(x,y) := -y^2 + x$

$R := \mathrm{rkfixed}(y,0,20,100,P)$

$x := R^{\langle 0\rangle} \qquad y := R^{\langle 1\rangle}$



2. Układy równań różniczkowych zwyczajnych 1. rzędu

A. Metoda rkfixed

Sposób rozwiązywania układów równań różniczkowych pierwszego rzędu jest podobny jak w przypadku rozwiązywania samych równań z tym, że tu wektor P składa się z n pierwszych pochodnych tworzących układ równań.

Przykład A.1. Oblicz następujący układ równań dla x ∈<0; 20>, kroków 100

$$\frac{d}{dx}y_0 = -0.2\cdot y_0 - y_1 - \left[\left(y_0\right)^2 + \left(y_1\right)^2\right]\cdot y_0 \qquad y_0(0) = 0$$

$$\frac{d}{dx}y_1 = -0.2\cdot y_1 + y_0 - \left[\left(y_0\right)^2 + \left(y_1\right)^2\right]\cdot y_1 \qquad y_1(0) = 1$$

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Warunek początkowy

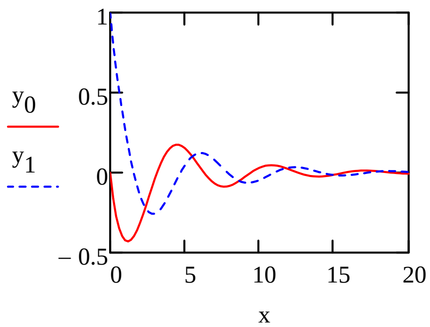
$$P(x,y) := \begin{bmatrix} -0.2\cdot y_0 - y_1 - \left[\left(y_0\right)^2 + \left(y_1\right)^2\right]\cdot y_0 \\ -0.2\cdot y_1 + y_0 - \left[\left(y_0\right)^2 + \left(y_1\right)^2\right]\cdot y_1 \end{bmatrix}$$

2. Definiujemy pochodne (stosujemy indeksy numeryczne)

$$R := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 20, 100, P)$$

$$x := R^{\langle 0\rangle} \qquad y_0 := R^{\langle 1\rangle} \qquad y_1 := R^{\langle 2\rangle}$$

3. Wywołanie integratora - wynik ma postać macierzy 3-kolumnowej, w której 1. kolumna to zmienna niezależna, 2.- wartości całki funkcji pierwszej, 3.- wartości całki funkcji drugiej



Uwaga - dla zmiennych wykresu y_0, y_1 wstawiamy indeksy nienumeryczne (przez kropkę).

B. Metoda rkadapt

Przykład B.1. Oblicz następujący układ równań dla $x \in <0;10>$ oraz 1000 kroków

$$\frac{d}{dx} y_0 = -8 \cdot y_0 + 8 \cdot y_1 \qquad y_0(0) = -1$$

$$\frac{d}{dx} y_1 = 30 \cdot y_0 + y_1 - y_0 \cdot y_2 \qquad y_1(0) = 0$$

$$\frac{d}{dx} y_2 = y_0 \cdot y_1 - \frac{8}{3} \cdot y_2 \qquad y_2(0) = 1$$

$$y := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Definiujemy wektor punktów początkowych

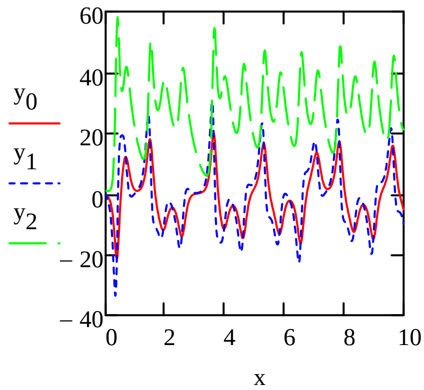
$$P(x,y) := \begin{pmatrix} -8 \cdot y_0 + 8 \cdot y_1 \\ 30 \cdot y_0 + y_1 - y_0 \cdot y_2 \\ y_0 \cdot y_1 - \frac{8}{3} \cdot y_2 \end{pmatrix}$$

2. Definujemy wektor pochodnych

$$R := \mathrm{Rkadapt}(y, 0, 10, 1000, P)$$

3. Wywołanie integratora

$$x := R^{\langle 0 \rangle} \qquad y_0 := R^{\langle 1 \rangle} \qquad y_1 := R^{\langle 2 \rangle} \qquad y_2 := R^{\langle 3 \rangle}$$



3. Metoda Stiffb - sztytwne układy równań różniczkowych

Metoda Stiffb - wykorzystuje metodę Bulirscha-Stoera. Sztywny układu równań różniczkowych występuje wtedy, gdy jedna z poszukiwanych funkcji zmienia się bardzo szybko lub bardzo wolno w stosunku do pozostałych.
W przypadku zwykłych integratorów prowadziłoby to do konieczności wykonywania obliczeń z bardzo małym krokiem zmiennej niezależnej.

Przykład 1. Rozwiąż układ równań dla 24 kroków w zakresie y ∈<0;0.08>

$$\frac{dy_0}{dx} = 1196 \cdot y_0 - 1995 \cdot y_1 \qquad y_0(0) = 2$$

$$\frac{dy_1}{dx} = 1197 \cdot y_0 - 1997 \cdot y_1 \qquad y_1(0) = -2$$

Kolejne kroki obliczeń:

Warunek początkowy: $y := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Wektor pochodnych: $P(x,y) := \begin{pmatrix} 1196 \cdot y_0 - 1995 \cdot y_1 \\ 1197 \cdot y_0 - 1997 \cdot y_1 \end{pmatrix}$

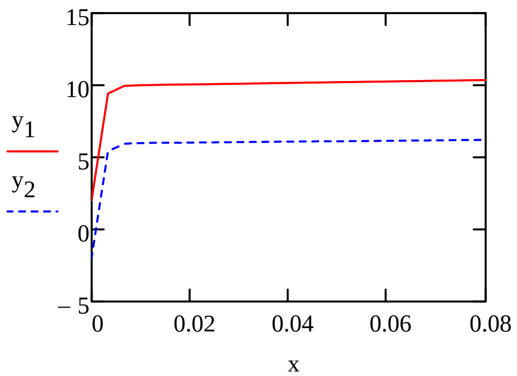
Jakobian: $J(x,y) := \begin{pmatrix} 0 & 1196 & -1995 \\ 0 & 1197 & -1997 \end{pmatrix}$

Pierwsza kolumna - pochodna funkcji po zmiennej x, druga kolumna - pochodna po y_0 i trzecia kolumna - pochodna po y_1

Wywołanie integratora:

$R := \mathrm{Stiffb}(y, 0, 0.08, 24, P, J)$

$x := R^{\langle 0 \rangle} \qquad y_1 := R^{\langle 1 \rangle} \qquad y_2 := R^{\langle 2 \rangle}$



4. Równania różniczkowe zwyczajne 2. rzędu

A. Metoda *rkfixed*

Postępujemy podobnie jak powyżej, różnice pojawiają się w definiowaniu wektora punktów startowych *y* - tu składa się z dwóch wielkości: wartości początkowej dla funkcji i dla pochodnej funkcji, również wyrażenie P składa się z dwóch funkcji: pochodnej i drugiej pochodnej.

Przykład A.1. Rozwiąż równanie różniczkowe y" = -y' + 2y dla wartości początkowej y(0)=1 i y'(0)=3 dla 100 kroków w zakresie $x \in$<0;1>

$$y := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Wektor wartości początkowych

2. Wektor pochodnych: definiujmy y_1=dy/dt i zapisujemy równanie różniczkowe jako układ dwóch równań 1. rzędu

$$\frac{dy}{dx} = y_1$$

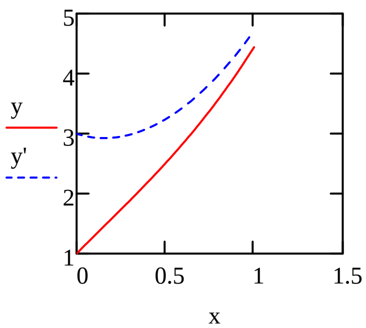
$$\frac{d^2}{dx^2}y = -\frac{d}{dx}y + 2y = -y_1 + 2y_0$$

$$P(x,y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_1 + 2\cdot y_0 \end{pmatrix}$$

3. Wywołanie integratora. Wynik jest macierzą trzykolumnową. Kolumna pierwsza - zmienna niezależna x, druga - zmienna zależna y, trzecia - pochodna y'

$$R := \mathrm{rkfixed}(y,0,1,100,P)$$

$$x := R^{\langle 0\rangle} \qquad y := R^{\langle 1\rangle} \qquad y' := R^{\langle 2\rangle}$$



B. Metoda Rkadapt - rozwiązujemy analogicznie jak metodą *rkfixed*

Przykład B.1. Rozwiąż równanie różniczkowe y" = 3 + x - y^2 dla $x \in$<0;1>, wartości początkowe y(0)=1, y'(0)=-2 , 10 kroków

$$y := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad P(x,y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ 3 + x - (y_0)^2 \end{bmatrix}$$

$$R := \mathrm{Rkadapt}(y,0,1,10,P)$$

$$x := R^{\langle 0\rangle} \qquad y := R^{\langle 1\rangle} \qquad y' := R^{\langle 2\rangle}$$