Proste obliczenia

Włączamy pasek narzędzi *Math*: View → Toolbars → Math. Klikamy na pierwszą ikonę paska *Math* aby wyświetlić pasek narzędzi *Calculator*: Obliczyć poniższe wyrażenia:

kombinacja klawiszy:

$2 + 3\cdot 5 = 17$ — *2+3*5=*

$2 + \frac{3}{5} = 2.6$ — *2+3/5=*

$\frac{2+3}{5} = 1$ — *2+3spacja/5=*

$\frac{2\cdot\sqrt{3}}{1-\pi} - \frac{2.5^3}{(1+0.33)^{\frac{1}{3}}} = -15.826$ — *2* \ 3 spacja spacja / 1 - p <Ctrl+g> spacja spacja - 2.5 <Shift+6> 3 spacja / 1+0.33 spacja <Shift+6> 1/3 =*

Definiowanie zmiennych

Zmienną definujemy pisząc jej nazwę, symbol ":" (<***Shift+:***>), po czym wpisujemy wartość lub równanie:

$d := 10$ — *a:10*

$P := \pi\cdot\frac{d^2}{4} = 78.54$ — *P : p <Ctrl+G> * d <Shift+6> 2 spacja / 4 =*

$\pi = 3.142$ — *zmienna π jest już zdefiniowana w programie*

Zad. Oblicz objętość 1 kg wody w temperaturze 0^{o}C, jeśli jej gęstość wynosi ρ_w= 999,87 kg/m^3

$\rho_w := 999.87$ — *r <Ctrl+G> kropka w : 999.87*

$m_w := 1$

$V_w := \frac{m_w}{\rho_w} = 0.001$ — *Zmieniamy format wyniku: Format →Result →Number format →Decimal, Number of decimal.places 3*

Obliczenia z jednostkami

$\rho_w := 999.87\cdot\frac{kg}{m^3}$ — *Jednostki dopsiujemy jako zmienne przemnożone przez wartość*

$m_w := 1\cdot kg$

$V_w := \frac{m_w}{\rho_w} = 0.001\cdot m^3$ — *Dopisujemy w kropce po wyniku symbol m^3, aby zmienić wyświetlaną jednosktę, program przeliczy wartość automatycznie*

Zad. Oblicz pole koła **P** w mm^2 dla danej wartości średnicy **d** równej 5 mm.

$d := 5\cdot mm$

$P := \pi\cdot\frac{d^2}{4} = 19.635\cdot mm^2$

Funkcje i wykresy

Zdefiniujemy funkcję **P** obliczającą pole koła dla danej średnicy **d:**

$$P(d) := \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

Obliczmy wartość P dla d=1:

$$P(1) = 0.785$$

Dla d=1 m

$$P(1 \cdot m) = 0.785\, m^2$$

Zad. Oblicz pole trapezu dla danych wartości podstaw a i b oraz wysokości h=5

$$h := 5$$

$$P_t(a,b) := \frac{a+b}{2} \cdot h \qquad P_t(1,2) = 7.5$$

Definiowanie przedziału zmiennej

zmienna : = wartość początkowa, wartość kolejna (pomijamy gdy krok=1), średnik, wartość końcowa

Zdefiniuj **k** w zakresie k ∈<1;10> z krokiem co 2: $k := 1, 3 .. 10$ k=

Zdefiniuj **j** w zakresie j ∈<-10;10> z krokiem co 1: $j := -10, -9 .. 10$ j=

Zdefiniuj **z** w zakresie j ∈<-5;0> z krokiem co 1/3: $z := -5, -4\frac{2}{3} .. 10$ z=

(uwaga-wstawiamy symbol ułamka z liczbą całkowitą ▪$\frac{▪}{▪}$ z paska Calculator)

Wykresy

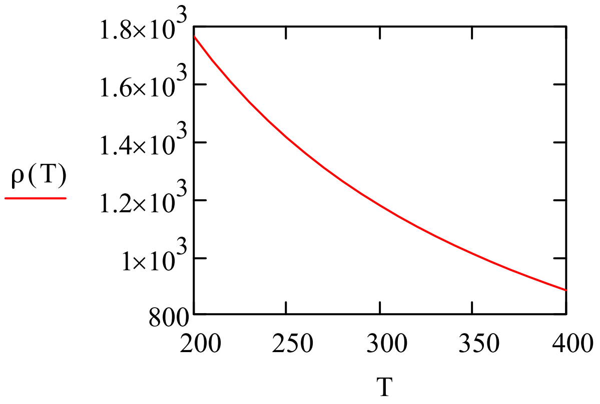
Zad. Oblicz gęstość powietrza w temperaturach T ∈<200 K; 210 K...400 K> pod ciśnieniem normalnym. Wyniki przedstaw na wykresie.

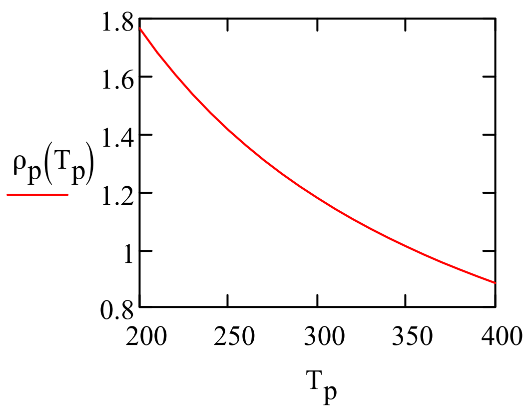
	Obliczenia bez jednostek	*Obliczenia z jednostkami*
ciśnienie	$P := 101325$	$P_p := 101325 \cdot Pa$
masa molowa	$M := 29$	$kmol := 10^3 \cdot mol \quad M_p := 29 \cdot \frac{kg}{kmol}$
stała gazowa	$R := 8.314$	$R_p := 8.314 \cdot \frac{J}{mol \cdot K}$
gęstość	$\rho(T) := \frac{P \cdot M}{R \cdot T}$	$\rho_p(T_p) := \frac{P_p \cdot M_p}{R_p \cdot T_p}$
zakres T	$T := 200, 210 .. 400$	$T_p := 200 \cdot K, 210 \cdot K .. 400 \cdot K$

Przykładowe wyniki:

$$\rho(300) = 1.178 \times 10^3 \qquad \rho_p(300 \cdot K) = 1.178 \frac{kg}{m^3}$$

Wstawiamy wykres 2-wymiarowy: Insert → Graph → X-Y Plot lub wpisujemy symbol @



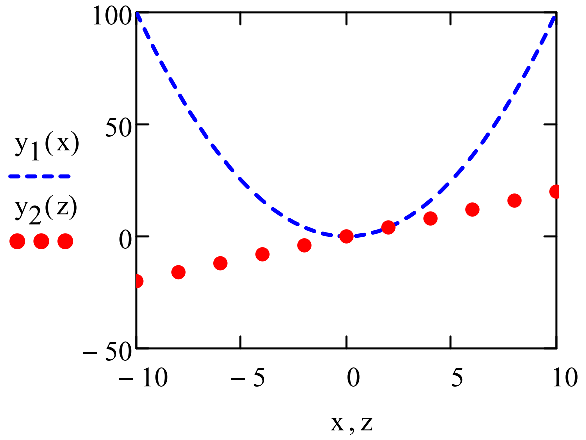


Zad. Przedstaw na wykresie funkcje: $y_1=x^2$ (niebieska linia przerywana) dla **x** ∈<-10;10> z krokiem co 0,5 oraz $y_2=2z$ (czerwone punkty) dla **z** ∈<-10;10> z krokiem co 2.

$y_1(x) := x^2$ $\qquad$ $x := -10, -9.5 .. 10$

$y_2(z) := 2 \cdot z$ $\qquad$ $z := -10, -8 .. 10$

Drugą funkcję dopisujemy na osi y po przecinku!



Formatowanie wykresu

Klikamy prawym przyciskiem myszy (PPM) na wykres → Format → zakładka *Traces* (lub klikamy podwójnie LPM → zakładka *Traces*). Funkcja $y_1(x)$ to wiersz oznaczony jako *trace 1,* a $y_2(x)$ to *trace 2*.

Dla trace 1 - zmieniamy linię ciągłą na kreskową *(Line* → - - -) o grubości 2 (*Line Wight* →2) i kolorze *Color*. Dla *trace 2* - punkty *(symbol →pełne kropki*) o grubości 2 (*Symbol Weight* →2), *Line* → *nic*, dobieramy *Color*.

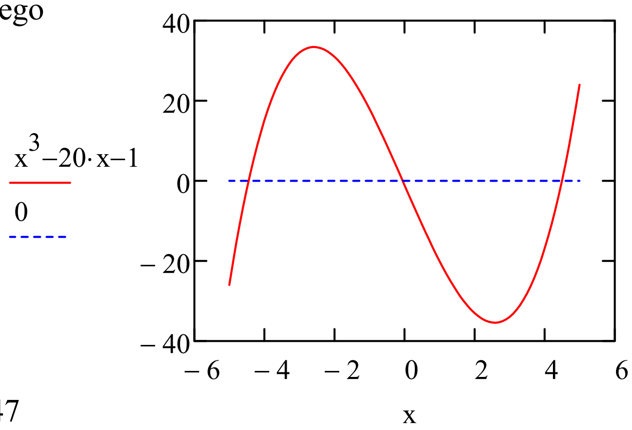
Mathcad - Równania i układy równań

1. Wyznaczanie pierwiastków wielomianów

1.1. Metoda funkcji *root*

Rozwiążmy równanie $x^3 = 20 \cdot x + 1$. Przekształcamy je do postaci $x^3 - 20 \cdot x - 1 = 0$ i wstawiamy wykres.

$x := -5, -4.9 .. 5$



a) Definiujemy wartość x w pobliżu punktu pierwszego
przecięcia się fukcji z osią 0X:

$x := -5$

b) Znajdujemy pierwszy pierwiastek:

$\mathrm{root}\left(x^3 - 20 \cdot x - 1, x\right) = -4.447$

c) Drugi pierwiastek:

$x := 0$ $\quad \mathrm{root}\left(x^3 - 20 \cdot x - 1, x\right) = -4.447$

d) Trzeci pierwiastek:

$x := 3$ $\quad \mathrm{root}\left(x^3 - 20 \cdot x - 1, x\right) = 4.497$

1.2. Metoda funkcji poly*roots*

Znajdź miejsca zerowe wielomianu $x^3 - 50 \cdot x + 5=0$.

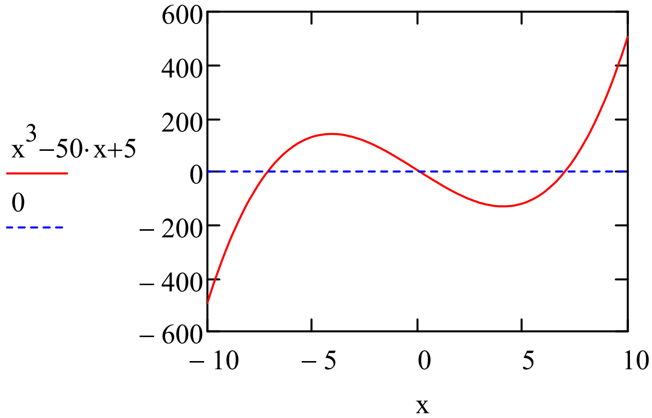
a) Piszemy równanie wielomianu w postaci:

$x^3 - 50 \cdot x + 5$

b) Zaznaczamy dowolny x i klikamy *Symbolics* → *Polynomial Coefficients*.
Definujemy powstały wektor współczynników jako v.

$x := -10, -9.9 .. 10$

$$v := \begin{pmatrix} 5 \\ -50 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



c) Rozwiązanie:

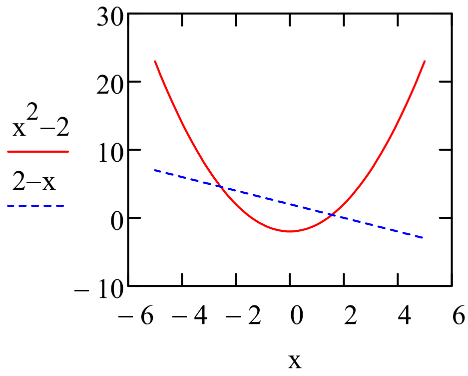
$$\mathrm{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -7.121 \\ 0.1 \\ 7.021 \end{pmatrix}$$

2. Rozwiązywanie układów równań

2.1. Metoda bloków (Given - Find)

Rozwiąż układ równań: $x^2 - 2 = y \qquad x + y = 2$

$x := -5, -4.9 .. 5$



a) Definiujemy punkty startowe dla każdej zmiennej:

$x := 0 \qquad y := 0$

Given — b) Piszemy słowo Given

$x^2 - 2 = y$ — c) Piszemy równania, znak = wstawiamy kombinacją Ctrl =

$x + y = 2$

$\text{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} 1.562 \\ 0.438 \end{pmatrix}$ — d) Znajdujemy rozwiązanie - współrzędne punktu przecięcia się funkcji

Aby obliczyć współrzędne drugiego punktu, musimy zmienić punkt startowy:

$x := -5 \qquad y := 0$

Given

$x^2 - 2 = y$

$x + y = 2$

$\text{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} -2.562 \\ 4.562 \end{pmatrix}$

2.2. Metoda macierzowa

Rozwiązaniem równania macierzowego $A \cdot X = B$ jest macierz $X = A^{-1} \cdot B$ gdzie A to macierz współczynników, B - wektor wyrazów wolnych.

Rozwiążmy układ równań: $2 \cdot x + y - z = 5 \qquad y + 7 \cdot z = 0 \qquad -x - y + 2 \cdot z = 1$

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 5.3 \\ -4.9 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

Mathcad - Całki i pochodne

1. Całki

Włączamy pasek narzędzi *Calculus* (symblol całki na pasku *Math*).

Całki nieoznaczone:

$$\int x\,dx \to \frac{25}{2} \qquad \int 1 + x^2\,dx \to -\frac{140}{3}$$

(symbol strzałki wstawiamy kombinacją Ctrl Kropka)

$$\int \frac{5 - 3\cdot x}{2} + \ln(x)\,dx \to -5\cdot\ln(-5) - \frac{105}{4} \qquad \int a\cdot x^b\,dx \to \frac{(-5)^{b+1}\cdot a}{b+1}$$

Całki oznaczone:

$$\int_0^1 x^3\,dx = 0.25 \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = 1$$

(ich wynik jest liczbą, dlatego obliczamy je wstawiając znak "równa się")

2. Pochodne

Pochodne pierwszego rzędu:

$$\frac{d}{dx}x \to 1 \qquad \frac{d}{dx}\left(x^2 + 1\right) \to -10 \qquad \frac{d}{dx}(b\cdot\ln(x)) \to -\frac{b}{5}$$

Pochodne wyższych rzędów:

$$\frac{d^2}{dx^2}x^2 \to 2 \qquad \frac{d^3}{dx^3}(\sin(x)\cdot\cos(x)) \to 4\cdot\sin(5)^2 - 4\cdot\cos(5)^2$$

Mathcad - Aproksymacja

Aproksymacja metodą linfit

Dane eksperymentalne y oraz x zostaną zaproksymowane za pomocą funkcji:

$$y_a(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

$$y := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 12 \\ 25 \end{pmatrix} \qquad x := \begin{pmatrix} 51 \\ 55 \\ 58 \\ 63 \\ 67 \end{pmatrix}$$

a) Definiujemy wektory danych

$$f(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

b) Definiujemy funkcję f(x) w postaci wektora wyrażeń bez współczynników

$$a := \mathrm{linfit}(x, y, f) = \begin{pmatrix} 301.098 \\ -11.427 \\ 0.109 \end{pmatrix}$$

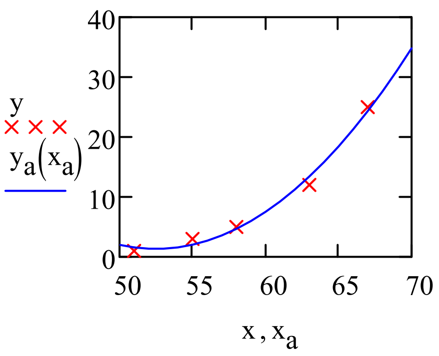
c) Obliczamy współczynniki a_0, a_1, a_2

$$y_a(x) := a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

d) Definiujemy funkcję aproksymacyjną

(indeksy przy a są numeryczne (wstawiane symbolem [ )

$$x_a := 50 .. 70$$



e) Przedstawiamy dopasowanie na wykresie

$$100 \cdot \frac{\sum \overrightarrow{\left| \frac{y_a(x) - y}{y} \right|}}{\mathrm{length}(x)} = 21.993 \ \%$$

f) Obliczamy błąd dopasowania

Zad. Zaproksymować dane y oraz x za pomocą funkcji:

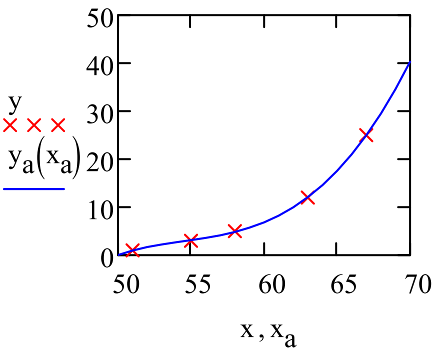
$$y_a(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot \ln(x) + a_3 \cdot x^2$$

$$y := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 12 \\ 25 \end{pmatrix} \qquad x := \begin{pmatrix} 51 \\ 55 \\ 58 \\ 63 \\ 67 \end{pmatrix}$$

$$f(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \ln(x) \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad a := \mathrm{linfit}(x, y, f) = \begin{pmatrix} -1.205 \times 10^4 \\ -176.449 \\ 4.817 \times 10^3 \\ 0.812 \end{pmatrix}$$

$$y_a(x) := a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot \ln(x) + a_3 \cdot x^2$$

$$x_a := 50 .. 70$$



$$100 \cdot \frac{\sum \overrightarrow{\left| \frac{y_a(x) - y}{y} \right|}}{\mathrm{length}(x)} = 2.225 \ \%$$